MA1 Domácí úkol č. 9 - lineární algebra.

I. Počítání s vektory a maticemi:

1. a) Určete vektor $\vec{v} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, je-li $\vec{u}_1 = (-1,\ 2,\ 1)$, $\vec{u}_2 = (2,\ 0,\ -1)$, $\vec{u}_3 = (3,\ 1,\ 1)$.
   b) Je-li $\vec{u} = (3,\ 2,\ 2)$, $\vec{v} = (2,\ 1,\ -1)$, spočítejte skalární součin $\vec{u}\cdot\vec{v}$, vektorový součin $\vec{u}\times\vec{v}$ a smíšený součin $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$.

---

a) jsou-li $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $a \in \mathbb{R}$,
pak $\vec{u} + \vec{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)$ a
$a.\vec{u} = (au_1, au_2, \dots, au_n)$,

tj. říkáme, že vektory z $\mathbb{R}^n$ sčítáme a násobíme číslem „po složkách";

tedy $\underline{\vec{v}} = 3(-1,2,1) - (2,0,-1) + 2(3,1,1) =$
$= (-3,6,3) + (-2,0,1) + (6,2,2) =$
$= (-3-2+6,\ 6+0+2,\ 3+1+2) = \underline{(1,8,6)}$

b) pro $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ je <u>skalární součin</u> definován $\vec{u}.\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$;
pro $\vec{u} = (3,2,2)$ a $\vec{v} = (2,1,-1)$ je tedy $\underline{\vec{u}.\vec{v} = 3.2 + 2.1 + 2.(-1) = 6}$;
<u>Vektorový součin vektorů</u> je definován v $\mathbb{R}^3$, a to

$$\vec{u}\times\vec{v} = (u_1,u_2,u_3)\times(v_1,v_2,v_3) = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)$$

(jako „pomůcku" pro výpočet se píše často $\times\begin{matrix}(u_1,u_2,u_3)\\(v_1,v_2,v_3)\end{matrix}$);

tedy zde $\underline{\vec{u}\times\vec{v}} = (3,2,2)\times(2,1,-1) \left(= \times\begin{matrix}(3,2,2)\\(2,1,-1)\end{matrix}\right) =$
$= (-2-2,\ 4+3,\ 3-4) = \underline{(-4,7,-1)}$.

<u>A smíšený součin $\vec{v}.(\vec{u}\times\vec{v})$:</u>
$\vec{v}.(\vec{u}\times\vec{v}) = (2,1,-1).(-4,7,-1) = (2(-4) + 1.7 + (-1)(-1)) = 0$

<u>A poznámka</u>: Je-li $\vec{u} \neq \vec{o}$, $\vec{v} \neq \vec{o}$, a $\vec{u}.\vec{v} = 0$, říkáme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou ortogonální (kolmé navzájem) – známe ze střední školy (fyzika i analytická geometrie). Tedy to, že $\vec{v}.(\vec{u}\times\vec{v}) = 0$, $\vec{v} \neq \vec{o}$ i $\vec{u}\times\vec{v} \neq \vec{o}$ lze chápat tak, že $\vec{u}\times\vec{v}$ je kolmý vektor k $\vec{v}$ (a stejně by vyšlo i pro $\vec{u}$), což opět známe ze „středoškolské" matematiky.

2. Vypočítejte následující součiny matice a vektoru (jsou-li definovány):

Matice A typu $m \times n$ lze násobit (zprava) vektorem $x \in R^n$, a je-li $A \cdot x = y$, pak $y \in R^m$ a $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$, $i = 1, 2, \dots m$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 + 4.2 - 1.3 \\ 2.1 + 0.2 + 1.3 \\ -1.1 + 1.2 + 0.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

„$(3 \times 3) \cdot (3, 1)$" (lze)

$$(1, \ 2, \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(1.1 + 2.2 + 3.(-1),\ 1.4 + 2.0 + 3.1,\ 1.(-1) + 2.1 + 3.0\right) = (2, 7, 1)$$

„$(1,3) \cdot (3,3) = (1,3)$"

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$ tento součin není definován

(„$(3 \times 1) \cdot (3 \times 3)$ – nelze")

3. Vypočítejte následující součiny matic (jsou-li definovány):

Je-li A matice typu (m, n) a B matice typu (n, p), pak je definován součin $A \cdot B = C$, C je typu (m, p) a $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $i = 1, 2, \dots m$, $j = 1, 2, \dots p$

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 14 \\ 7 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

(na „rychleji" psáno)

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -15 & 6 \\ 1 & 9 & -2 \\ -3 & 16 & -4 \end{pmatrix}$$

„$(3 \times 3) \cdot (3 \times 3) = (3 \times 3)$"

Poznámka: všimněte si, že násobení těchto matic není komutativní, což je „obecná" vlastnost násobení matic.

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 16 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

„$(3 \times 3) \cdot (3 \times 2) = (3 \times 2)$"

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ není definováno

$(3 \times 2) \cdot (3 \times 3)$ není definováno

II. Řešení soustav lineárních rovnic a procvičení pojmů k tomu potřebných:

1. Najděte všechna řešení soustavy lineární rovnic (nebo ukažte, že soustava řešení nemá) - - užijte Gaussovu eliminační metodu:

a)
$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= -3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ -3x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

soustavu zapíšeme „maticově" a budeme řešit Gaussovou eliminační metodou (samozřejmě můžeme řešit i „jinak", ale cvičíme „Gausse"):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{výměna 1. a 2. ř.}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l}\sim \\ 2.ř. - 2\times 1.ř. \\ 3.ř. + 2\times 1.ř. \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \end{array}\right) \underset{3.ř. + 7\times 2.ř.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \underset{3.ř. \times (-\frac{1}{2})}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{k soustavě rovnic (ekvivalentní se zadanou)}]{\text{a zpět}} \begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \quad (1) \\ y + z &= 1 \quad (2) \\ z &= 2 \quad (3) \end{aligned}$$

a odtud (t.zv. zpětným chodem) dostaneme z (2) $y = 1 - 2 = -1$

a z (3) $x = 1 - 2(-1) - 2 = 1$;

tedy řešení soustavy je (lze chápat jako) vektor $(x, y, z) = (1, -1, 2)$

zkouška správnosti řešení (uděláme „maticově")

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) - 3\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 2 \\ -3\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(„vyšlo")

b)
$$\begin{aligned} 2x-\ \ y+\ \ z+\ \ v &= -3\\ x+\ \ y+3z-\ \ v &= 0\\ -x+2y-\ \ z+\ \ v &= 6\\ x+\ \ y+2z-3v &= -2 \end{aligned}$$

opět řešíme Gaussovou eliminační metodou: (poté, co soustavu zapíšeme „maticově")

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{výměna}\\ \text{1. a 3. ř.}}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 1 & 1 & 3 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 2 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{l} \text{2. ř. + 1. ř.}\\ \text{3. ř. − 2× 1. ř.}\\ \text{4. ř. + 1. ř.} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 6\\ 0 & 3 & -1 & 3 & 9\\ 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{\text{3. ř. − 2. ř.}\\ \text{4. ř. − 2. ř.}}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 6\\ 0 & 0 & -3 & 3 & 3\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \ \text{3. ř.} \times \left(-\tfrac{1}{3}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \underset{\text{4. ř. + 3. ř.}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 & 6\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 3 & 2 & 0 & 6\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

a odtud k soustavě rovnic, ekvivalentní se soustavou zadanou:

$$\begin{aligned} -x+2y-z+v &= 6\\ 3y+2z &= 6\\ z-v &= -1\\ v &= 1 \end{aligned}$$

a odtad (zpětný chod)

$$\begin{aligned} x &= -1 \quad (= 2y - z + v - 6)\\ y &= 2\\ z &= 0\\ v &= 1 \end{aligned}$$

A navíc (jako „trénink" násobení matice vektorem) zkouška:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & -1\\ -1 & 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2+0+1\\ -1+2+0-1\\ 1+4+0+1\\ -1+2+0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\\ 0\\ 6\\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Lineární závislost a nezávislost vektorů (a i užití řešení soustav):

   (i) Ukažte, že vektory
$$\vec{b}_1 = (1,-1,0),\ \vec{b}_2 = (1,\,-1,\,-1),\ \vec{b}_3 = (0,\,1,\,-2)$$
   jsou lineárně nezávislé.

„Návod": vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ jsou lineárně nezávislé (LNZ), když platí: $\sum_{i=1}^{3} c_i \vec{b}_i = \vec{o} \iff c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (1)

($\vec{o} = (0,0,0)$)

nebo žádný z vektorů $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ není lineární kombinací (LK) (ekvivalentně) vektorů ostatních (2)

Užijeme (1): nechť $c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + c_3\vec{b}_3 = \vec{o}$ a hledáme řešení soustavy

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy „maticově"
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(vidíme, že sloupce matice této soustavy jsou vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$)

Řešíme soustavu opět Gaussovou metodou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{2.ř.+1.ř.}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

soustava pro c_1, c_2, c_3:
$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ -c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

má jediné řešení $c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Rightarrow$ vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ jsou LNZ.

Poznámka: LNZ (resp. LZ) vektorů se nemění ekvivalentními úpravami matice, jejíž řádky jsou dané vektory, tak lze snadno zjistit LNZ či LZ úpravou matice (této) na HTM:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{2.ř.-1.ř.}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– matice je horní Δ, s nenulovými prvky na diagonále, takže řádky jsou LNZ, tak i řádky matice „původní" jsou LNZ

Pozn.: Matice, jejíž řádky jsou vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ je transponovaná k matici soustavy pro výpočet koeficientů v LK c_1, c_2, c_3.

(ii) Rozhodněte, zda vektory

$$\vec{b}_1=(1,-1,0),\ \vec{b}_2=(1,-1,-1),\ \vec{b}_3=(0,1,-2),\ \vec{b}_4=(2,-1,1)$$

jsou lineárně nezávislé, resp. lineárně závislé.

Zde – vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ jsou nutně lineárně závislé (LZ), neboť maximální počet LNZ vektorů v R^3 je $\underline{\underline{3}}$; ukážeme to

a) pomocí úpravy matice, kde vyšetřované vektory jsou řádky:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-1.ř.+2.ř.$, $4.ř.-2\times 1.ř.$ $\quad$ $4.ř.-3.ř.$ $\quad$ $4ř+2ř.$

odtud je vidět, že řádky výsledné matice (ekvivalentní s původní) jsou LZ (obsahují nulový vektor), tedy i řádky matice původní, tj. vektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$ jsou LZ.

b) zkusme řešit i dle definice, tj. hledáme koeficienty c_1, c_2, c_3, c_4 tak, aby $c_1\vec{b}_1+c_2\vec{b}_2+c_3\vec{b}_2+c_4\vec{b}_4=\vec{o}$, tj. řešme soustava

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gaussova eliminace:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{soustava}} \begin{aligned} c_1 + c_2 \quad\quad + 2c_4 &= 0 \\ c_3 + c_4 &= 0 \\ -c_2 - 2c_3 + c_4 &= 0 \end{aligned}$$

$1ř+2.ř.$

má nekonečně mnoho řešení (1 parametr

zvolme $c_3=t$, pak $c_4=-t$, $c_2=-3t$, $c_1=5t$, $t\in R$ (stačí např. $t=1$), tedy existuje $(c_1,c_2,c_3,c_4)=t(5,-3,1,-1)\neq\vec{o}$ (pro $t\neq 0$)

tak, že $c_1\vec{b}_1+c_2\vec{b}_2+c_3\vec{b}_3+c_4\vec{b}_4=\vec{o}$, zde $(t=1)$

$$5\vec{b}_1-3\vec{b}_2+\vec{b}_3-\vec{b}_4=\vec{o},$$ tedy například

$$\vec{b}_4=5\vec{b}_1-3\vec{b}_2+\vec{b}_3 \quad (\vec{b}_4 \text{ je LK } \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3),$$

analogicky i každý vektor $\vec{b}_i$ $(i=1,2,3)$ je LK těch vektorů „daných".

3. Je dána matice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Určete hodnost matice A.

b) Co pak víte podle výsledku příkladu a) o řešení soustavy rovnic (*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

c) Soustavu (*) vyřešte.

---

a) Hodnost matice je maximální počet LNZ řádků, resp. sloupců matice (platí : $h(A) = h(A^T)$ A^T matice transponovaná k A, $h(A)$ značí hodnost matice A)

Hodnost matice $h(A)$ určíme převedením matice A na ekvivalentní HTM (tj. ekvivalentními úpravami)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{2.ř.-2\times 1.ř. \\ 3ř.-2\times 1.ř. \\ 4.ř.+1.ř.}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{4.ř.+3.ř. \\ 2ř.\times 1/3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{4.ř.-3\times 2.ř.}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (**) \Rightarrow$$

$h(A) = 3$, neboť první tři řádky (upravené) ekvivalentní matice jsou LNZ, a čtvrtý je nulový.

b) Soustava rovnic (*) je soustava (homogenní) pro čtyři neznámé, s maticí soustavy A, kde $h(A) = 3$; pak tedy soustava (*) má nekonečně mnoho řešení tvaru $(x,y,z,v) = t(a_1,a_2,a_3,a_3)$, $t \in R$, a $(a_1,a_2,a_3,a_4) \neq (0,0,0,0)$

K řešení využijeme získanou HTM (**) : pak soustava má tvar

$$\begin{aligned} x + 2y - z \quad &= 0 \\ -3y + z + 2v &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

a odtud: zvolíme $y = t$, pak $z = 3t$, a $x = z - 2y = 3t - 2t = t$,

tedy soustava (*) má řešení $(x,y,z,v) = t(1,1,3,0)$, $t \in R$
(nekonečně mnoho)

4. a) Vysvětlete, co je regulární, respektive singulární čtvercová matice.
Definujte pojem inverzní matic . Kdy k dané matici existuje matice inverzní?

b) Je dána matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ukažte, že matice A je matice regulární a Gauss-Jordanovou metodou určete matici inverzní k matici A .

---

a) Čtvercová matice A typu $n \times n$ je regulární, když $h(A)=n$
(tj. řádky, resp. sloupce matice jsou LNZ).
Je-li $h(A) < n$, pak A se nazývá matice singulární
(má řádky i sloupce LZ)

b) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow h(A)=3$$ (řádky jsou LNZ)
tj. matice A je regulární

a výpočet inverzní matice A^{-1}:
„návod" pro metodu Gauss-Jordana: $(A|I) \sim \dots \sim (I, A^{-1})$
tedy:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zkouška: A^{-1} je inverzní matice k A, když platí $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$:

Zkusme:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (cbd.)

5. Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Vypočítejte součin $A\,.\,B$.

(ii) Ukažte, že k matici A existuje matice inverzní a určete ji. Dá se použít (i) ?

(i) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$,

(ii) tedy, dle definice inverzní matice je $B = A^{-1}$;
navíc, můžeme ukázat, že i $B \cdot A = I$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Užitím A^{-1} řešte rovnici

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a proveďte zkoušku správnosti řešení.

Řešíme-li soustavu $A \cdot x = b$, kde existuje A^{-1}, pak $x = A^{-1} \cdot b$

$\left(A \cdot x = b \;\middle|\; (A^{-1} \cdot) \Rightarrow A^{-1}(A\,x) = A^{-1} \cdot b \Rightarrow I \cdot x = A^{-1} b \text{, tj. } x = A^{-1} \cdot b \right)$

tedy zde:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Zkouška: $A \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 3 + 2 \\ -2 + 2 + 2 \\ -2 + 1 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

III. Determinanty a jejich užití:

1. Vypočítejte determinanty:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot 4 - 6\cdot(-1) = 26$

b) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ (Sarrusovo pravidlo)

$\overset{(*)}{=} (-2)\cdot(-3)(-3) + 1\cdot(-2)\cdot 1 + 3\cdot 5\cdot 4 - (1\cdot(-3)\cdot 3 + 4\cdot(-2)(-2) + (-3)\cdot 5\cdot 1) = \dots = 48$

nebo úpravami zjednodušíme

(*) 1.ř.+3ř. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 5 & -3 & -2 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 10 + 0 - (0 + 8 - 75) = 75 - 27 = 48$

pak Sarrusovo pravidlo

c) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\cdot(-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

2.sl.+3.sl.
4.sl.+2×3.sl.

rozvoj dle 2.ř.

(úpravami k „malému" determinantu)

$= - \begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & 11 & 22 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 11 & 22 \end{vmatrix} =$

$= 2\cdot 11 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 22\cdot(4-5) = \underline{\underline{-22}}$

d) $\begin{vmatrix} a & 2a & -a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a\cdot b\cdot b \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{(*)}{=} ab^2\cdot(-1)^{2+1}\cdot 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ rozvoj dle 3. sl.

rozvoj dle 2.ř.

(vytknutí
a z 1.ř.
a b z 2. a 3.ř.)

$= -ab^2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -ab^2(2-1) = \underline{\underline{-ab^2}}$

((*) – lze též rozvinout determinant dle 4.sloupce – zkuste též)

2. Užitím determinantů určete matici inverzní k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matice A typu $n \times n$ je regulární $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$ a pak

$$(*) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \left(A_{ij} \right)^T ,$$

kde A_{ij} je algebraický doplněk k prvku a_{ij} matice A $(j, i = 1, \dots n)$

Zde:
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)(-2) = 6$$

$\Rightarrow$ A je regulární matice, existuje tedy A^{-1}.

Dle vzorce $(*)$:
$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ +2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

což se shoduje s maticí A^{-1}, vypočtenou Gauss-Jordanovou metodou v příkladu II/4.

Navíc, je toto i příklad, kde vidíme, že $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

($\det(A^{-1}) = \frac{1}{6}$, $\det A = 6$ – stačí spočítat $\det(A^{-1})$.

$$\det A^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6^3} \cdot 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6^3} \cdot 6 \cdot 6 = \frac{1}{6})$$

3. Užitím determinantu „zkontrolujte“, že matice A a B z příkladu II / 5. jsou regulární.

Platí: matice A typu $n\times n$ je regulární $\iff \det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

4. Pomocí determinantu spočítejte znovu smíšený součin $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})$, kde $\vec{u}=(3,\ 2,\ 2)$, $\vec{v}=(2,\ 1,\ -1)$.

Smíšený součin vektorů $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$, $\vec{z}=(z_1,z_2,z_3)$

$$\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \quad (*)$$

neboť rozvineme-li determinant (*) dle 1. řádku, dostaneme

$$x_1 \cdot \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z})$$

Tedy, užitím determinantu, lze snadno ukázat, že $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})=0$:

$$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

↳ (zde už je vidět, že matice je singulární, tedy její determinant je roven 0).